Álxebra Linear e Multilineal. Grao en Matemáticas. USC.
Lista de exercicios, tema 1. Polinomios.

Problema 1. Determinar un polinomio $p(x)$ de grao mínimo tal que $x^2 + 1 \mid p(x)$ e $x^3 + 1 \mid p(x) - 1$.

Problema 2. Se $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e $p(r/s) = 0$, con $(r, s) = 1$, demostrar que $r - s \mid p(1)$ e $r + s \mid p(-1)$.

Problema 3. Os seguintes apartados son independentes entre si.

(a) Descompoñer $x^4 + a^2 \in \mathbb{R}[x]$ en factores irredutibles.

(b) Descompoñer $(x + 1)^n + (x - 1)^n \in \mathbb{C}[x]$ en factores lineares.

(c) Demostrar que o polinomio $x^4 - 9x^2 - 18x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ é irredutible. Podemos dicir o mesmo do polinomio $x^4 - 9x^2 - 18x - 9 \in \mathbb{Q}[x]$?

(d) Demostrar que o polinomio $x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ é irredutible.

Problema 4. Un número $\alpha \in \mathbb{C}$ chámase alxébrico se existe un polinomio mónico $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de maneira que $p(\alpha) = 0$.

(a) Probar que os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3} + 1$, $\sqrt[3]{5} - 3$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ son alxébricos e encontrar un polinomio con coeficientes racionais do cal sexan ceros.

(b) Demostrar que para todo número alxébrico α existe un único polinomio mónico $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de maneira que $p(\alpha) = 0$ e calquera outro polinomio $q(x)$ tal que $q(\alpha) = 0$ cumpre que $q(x) = p(x)a(x)$, para algún $a(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Para os números do apartado anterior, cal é ese polinomio $p(x)$?

(c) Demostrar que a suma e o produto de elementos alxébricos é un número alxébrico.