Álxebra Linear e Multilineal. Grao en Matemáticas. USC.
Lista de exercicios, tema 2. Aplicacións multilineais e determinantes.
Espazo dual.

Problema 1. Sexa $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ unha aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (2x + y, y - z)$ e sexan

$$u = ((1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, -1)) \quad \text{e} \quad v = ((1, 0), (1, 1))$$

bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

(a) Sexa $e^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ a base dual da base canónica e de $\mathbb{R}^3$. Expresar a base dual $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ en termos de e^*.

(b) Encontrade as compoñentes de $w = 2e_1^* + e_2^* - e_3^*$ na base u^*.

(c) Determinar a matriz $M_{v^*,u^*}(f^*)$ da aplicación dual de f nas bases v^* e u^*, respectivamente.

Problema 2. Sexa V un espazo vectorial, e fixemos $w \in V$ e $\phi \in V^*$. Demostrar que a aplicación $f : V \longrightarrow V$ dada por $f(v) = v + \phi(v)w$ é un endomorfismo, e calculade a aplicación dual f^*.

Grupo simétrico.

Problema 3.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_9,$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 8 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in S_8$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 10 & 5 & 2 & 4 & 9 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in S_{10}.$$

Calcular a descomposición en ciclos disxuntos, unha descomposición en produtos de transposicións, a orde e o signo. Calculade tamén σ_1^{1000}, σ_2^{250} e σ_3^{611}.

Problema 4. Demostrar as seguintes propiedades do signo.

(a) Se ι é a identidade, entón $\operatorname{sgn}(\iota) = 1$.

(b) Se τ é unha transposición, $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

(c) Se $\gamma = (a_1, \dots, a_m)$ é un ciclo de lonxitude m, $\operatorname{sgn}(\gamma) = (-1)^{m-1}$

(d) $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$.

(e) $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

(f) Fixada unha transposición ε, toda permutación impar pódese escribir como o produto dunha permutación par por ε.

Aplicacións multilineais.

Problema 5. Sexa $E = \mathbb{R}^3$. Probar que $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicación definida por

$$f(x, y) = 2x_1y_3 - 3x_2y_3 + x_2y_1 - x_3y_2$$

é multilineal (dito doutra maneira, é un tensor 2-covariante). Expresalo na base $\{e_i^* \otimes e_j^*\}_{1 \leq i,j \leq 3}$, onde $e = (e_1, e_2, e_3)$ é a base canónica de E e $e^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ é a súa base dual. Encontrar a matriz de f na base e.

Problema 6. Sexan $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$ bases do espazo vectorial E con $v_j = \sum_i s_j^i u_i$. Se $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ e $v^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ son as bases duais respectivas e $f \in T_2(E)$ é tal que

$$f = \sum_{i,j} \lambda_{ij} u_i^* \otimes u_j^* = \sum_{i,j} \mu_{ij} v_i^* \otimes v_j^*,$$

entón $\mu_{ij} = \sum_{k,\ell} s_i^k s_j^\ell \lambda_{k\ell}$.

Problema 7. Sexa $e = (e_1, e_2)$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$ e $e^* = (e_1^*, e_2^*)$ a súa base dual. Consideramos a aplicación multilineal $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi = e_1^* \otimes e_1^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_1^* \otimes e_2^* - e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_1^* - e_2^* \otimes e_1^* \otimes e_1^* + e_2^* \otimes e_2^* \otimes e_1^* + e_2^* \otimes e_2^* \otimes e_2^*.$$

Encontrar $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2))$. É φ un tensor simétrico?

Problema 8. Probar que se (e_1, e_2, e_3) é unha base do espazo vectorial E, entón o tensor

$$\varphi = e_1^* \otimes e_1^* + 2e_1^* \otimes e_2^* - e_1^* \otimes e_3^* + 2e_2^* \otimes e_1^* + 3e_2^* \otimes e_3^* + 3e_3^* \otimes e_2^* \in T_2(E)$$

é simétrico e o tensor $\eta = e_1^* \otimes e_2^* + e_1^* \otimes e_3^* - e_2^* \otimes e_1^* - e_3^* \otimes e_3^*$ é antisimétrico.

Determinantes.

Problema 9. Calcular os seguintes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Problema 10. Encontrar o determinante da matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ con coeficientes $a_{ij} = |i - j|$.

Problema 11. Demostrar que toda matriz cadrada antisimétrica (é dicir, que cumpre que $A^t = -A$) de tamaño n impar ten determinante 0.

Problema 12. Comprobar a identidade seguinte, coñecida como *determinante de Vandermonde*:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (a_i - a_j).$$

Usar este resultado para demostrar que se $t_1, \ldots, t_n$ son elementos dun corpo K, diferentes de cero e todos diferentes entre si, entón, para todo $m \in \mathbb{Z}$, o conxunto de vectores $\{(t_1^k, \ldots, t_n^k)$ con $m \leq k \leq m + n - 1\}$ é unha base de K^n.