Álxebra Linear e Multilineal

Grao en Matemáticas

Área de Álxebra (Departamento de Matemáticas)

11/09/2023

Segundo curso do Grao en Matemáticas (e programas de dobre titulación)

Profesorado da materia

O profesorado da materia é todo da Área de Álxebra (nivel 5).

- María Pilar Páez Guillán: `pilar.paez@usc.es`.
- Andrés Pérez Rodríguez: `andresperez.rodriguez@usc.es`. Algunhas clases de problemas. Despacho 521.
- **Óscar Rivero Salgado**: `oscar.rivero@usc.es`. Despacho 509. Horario provisional de titorías: martes e venres de 10 a 11.30. Podemos buscar horas máis convenientes se o preferides.

Ao longo do curso, é probable que algún outro profesor se incorpore á materia.

Horario da materia

Dous grupos principais (CLE 1 e CLE 2).

- Grupo CLE 1. Luns de 19 a 20, martes de 18 a 19 e mércores de 19 a 20. Aula 2.
  - Grupo CLIL 1. Xoves de 17 a 18. Aula 7.
  - Grupo CLIL 2. Xoves de 19 a 20. Aula 9.
  - Grupo CLIL 3. Xoves de 18 a 19. Aula 7.
- Grupo CLE 2. Martes de 19 a 20, mércores de 18 a 19 e xoves de 18 a 19. Aula 3.
  - Grupo CLIL 4. Luns de 18 a 19. Aula 9.
  - Grupo CLIL 5. Luns de 19 a 20. Aula 9.
  - Grupo CLIL 6. Martes de 17 a 18. Aula 9.

Mañá martes non faremos as clases de laboratorio. (Esta semana cada un de vós terá entón 3 clases da materia, e non as 4 habituais).

Datos da materia

- A materia de Álxebra Linear e Multilinear é unha obrigatoria de segundo curso no Grao de Matemáticas.
  - Comparte cuadrimestre con *Diferenciación de Funcións de varias Variables Reais*, *Programación Linear e Enteira*, *Cálculo Numérico e Matricial* e *Física Básica*.
  - Segunda parte dunha triloxía iniciada con *Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial* e que concluirá con *Xeometría Linear*.
- Tamén se cursa nos diferentes programas de dobre titulación (Física e Informática) que involucran á facultade.
- 6 ECTS: 60 horas de clase e 90 de traballo autónomo por parte dos alumnos.
- Contades tamén con titorías para poder seguir de cerca o voso progreso na materia.
- Contribúe a desenvolver varias das competencias recollidas na memoria do título (CX2, CX4, CE4, CE9, CT1 e CT5).

Motivación e sentido da materia

- O cuadrimestre pasado cursastes *Espazos Vectoriais e Cálculo Matricial*, onde vos familiarizastes coas aplicacións lineais e as súas propiedades.
- Aquí seguiremos avanzando no estudo dos espazos vectoriais e das aplicacións entre eles. Algúns dos temas que trataremos son os seguintes.
    - Aplicacións multilineais e determinantes.
    - Nocións de vector propio e valor propio.
    - Diagonalización e forma de Jordan.
    - Produtos escalares (estrutura métrica en espazos vectoriais).
    - Formas cuadráticas.
    - Tensores.
- En *Xeometría Linear* continuaremos de forma natural esta materia engadindo máis estrutura. Importante tamén para *Estruturas Alxébricas* (grupo simétrico e aneis de polinomios).

Temario

A materia consta de seis temas, aínda que dous deles serán os máis extensos e por tanto os que teñan maior relevancia (o 3 e o 5).

1. **Polinomios.** Nocións básicas de polinomios e divisibilidade (necesarias para a clasificación de endomorfismos).
2. **Aplicacións multilineais e determinantes.** Introducir a noción de determinante e as súas propiedades básicas.
3. **Estrutura das aplicacións lineais**. Vectores e valores propios. Clasificación de endomorfismos (diagonalización e forma de Jordan).
4. **Formas bilineais e cuadráticas.** Produtos escalares e estruturas métricas. Teorema de Sylvester e teorema espectral.
5. **Tensores e álxebra tensorial.** Extensións das nocións de aplicacións multilineais e dualidade.

Espazo cociente, espazo dual e aplicacións multilineais

Sexa E un K-espazo vectorial.

- **Espazo cociente:** $F \subset E$ subespazo vectorial. Definimos unha relación de equivalencia como $v \sim w$ se $v - w \in F$. O espazo obtido escríbese como E/F e a dimensión é $\dim E - \dim F$.
- **Espazo dual:** conxunto das aplicacións lineais $\varphi : E \longrightarrow K$. Escribimos E^* ou $\mathcal{L}(E, K)$. Ten dimensión $\dim E$.
- Máis en xeral, queremos considerar as aplicacións lineais

$$E \times \overset{n}{\cdots} \times E \longrightarrow K.$$

  O determinante vai ser un exemplo moi importante. Demostraremos o teorema de Laplace e a regra de Cramer.
- No tema de tensores, volveremos a isto para tratar temas máis xenéricos (produto exterior ou produto tensorial de espazos).

Estrutura das aplicacións lineais

- Unha matriz A **non** é unha aplicación lineal. É a representación dunha aplicación lineal respecto a unha certa base $\mathcal{B}$.
- Dada outra base $\mathcal{B}'$, a matriz da aplicación lineal é outra, B. Se P é a matriz que pasa de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, entón $A = P^{-1}BP$.
- Pregunta I: determinar cando dúas matrices representan a mesma aplicación lineal (en distintas bases).
- Pregunta II: encontrar unha base *canónica* na cal a matriz sexa o máis sinxela posible.
- As matrices máis sinxelas son as diagonais, pero iso non sempre será posible.
- Vector propio: o resultado de aplicarlle a aplicación lineal é o propio vector multiplicado por un escalar (valor propio).

Forma de Jordan (aplicacións I)

- Resolución de recorrencias.
- Resolución de EDOs.
- Análise funcional: álxebra lineal en dimensión infinita. Seguiremos diagonalizando! Resolución de EDPs (atopar valores propios de operadores en dimensión infinita).
- Teoría de números. Espazos de formas modulares.
- Física (mecánica clásica): o tensor de inercia é unha matriz que sempre diagonaliza. Os vectores propios son os tres eixes principais do sólido (perpendiculares entre si).
- Física (mecánica cuántica): hai unha aplicación lineal, o hamiltoniano, que goberna un sistema físico. Os distintos niveis de enerxía son os valores propios do hamiltoniano.
- Algoritmos de busca (PageRank).

Forma de Jordan (aplicacións II)

- A sucesión de Fibonacci está dada por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ se $n \geq 0$.
- Temos a identidade

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Polo tanto

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Se escribimos $A = P^{-1}DP$, con D diagonal, entón

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = P^{-1}D^nP \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Formas bilineais

- Estudo das aplicacións $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ que son lineais en cada variable.
- Se φ é simétrica e ademais $\varphi(v, v) > 0$ para todo $v \neq 0$, entón é un produto escalar.
- Como cos endomorfismos, podemos clasificar as formas bilineais. Nocións de perpendicularidade.
- Mellores propiedades de diagonalización (sobre $\mathbb{R}$): *toda matriz simétrica diagonaliza nunha base ortonormal*.
- Historia similar sobre os números complexos: noción de forma hermítica.
- Sentido xeométrico o próximo cuadrimestre (clasificación de cónicas e cuádricas).

Metodoloxía

- Tres horas á semana de teoría (aproximadamente 36 horas). Clases *convencionais* no encerado. Animámosvos a participar activamente con preguntas e suxestións.
- Se fora necesario, colgaremos apuntamentos e material no campus virtual.
- Unha hora de problemas á semana (aproximadamente 12 horas). Grupos duns 25 alumnos.
- Problemas dispoñibles con antelación no campus virtual. As primeiras listas xa están dispoñibles. Traballainas por conta propia!
- Titorías en grupos reducidos. Serven para realizar un seguimento máis personalizado dos alumnos. Vide polos despachos!

Bibliografía

Algunhas referencias por orde alfabética. Moitos outros recursos dispoñibles en liña.

- Artin, Emil. *Álgebra geométrica*. Ed. Limusa, México, 1992.
- Castellet, M.; Llarena, I. *Álgebra lineal y geometría*. Ed. Reverté, Barcelona, 1991.
- De Burgos, J. *Álgebra lineal y geometría cartesiana.* Ed. MacGraw-Hill, Madrid, 1999.
- Gruenberg, K.W.; Weir, A.J. *Linear Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- Hernández, E. *Álgebra y geometría*. Ed. Addison Wesley, Madrid, 1994.

Avaliación

A nota final virá dada por

$$\max\{F; 0.7F + 0.3C\},$$

onde:

- F é a nota do exame final (9 de xaneiro).
- C é a nota da avaliación continua.

A avaliación continua constará dos seguintes ítems:

- Dúas probas parciais, a celebrar ao longo do cuadrimestre nas horas de clase.
- Dúas actividades para entregar, a resolver de xeito individual.

Os exames (tanto da continua como o final) incluirán teoría e problemas. Non vos centredes unicamente en resolver exercicios *tipo*!

Avaliación continua

A nota da avaliación continua será

$$C = \frac{1}{3} \cdot P_1 + \frac{1}{3} \cdot P_2 + \frac{1}{6} \cdot E_1 + \frac{1}{6} \cdot E_2,$$

onde P_1 e P_2 son as probas parciais e E_1 e E_2 as actividades para entregar.

- As probas parciais serán curtas (unha hora).
- A primeira actividade para entregar está dispoñible no campus virtual.
    - Dous exercicios (longos) para repasar espazo dual e espazo cociente.
    - Dous exercicios do tema de diagonalización e formas de Jordan.
    - Entregar o día da primeira proba parcial.
- A segunda terédela que presentar na última clase teórica do curso.
- Animámosvos a entregar polo menos unhas das actividades en LaTeX. Coidade a expresión matemática e lingüística.

Primeiro día: polinomios

Sexa K un corpo. O anel de polinomios nunha variable con coeficientes en K é

$$K[X] = \{f(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n,\ a_i \in K\}.$$

- Coas operacións da suma e da multiplicación habituais é un anel conmutativo.
- Concepto de grao e propiedades.
- División euclidiana.
- Ceros de polinomios: teorema fundamental da álxebra (sobre $\mathbb{C}$) e algúns criterios de irredutibilidade sobre $\mathbb{Q}$.

Contidos a repasar

- Tódolos contidos de *Espazos vectoriais e cálculo matricial*.
- Algoritmo de Euclides, identidade de Bézout e outros conceptos de divisibilidade sobre os números enteiros.
- Na segunda clase do curso imos traballar xa co espazo dual.
- Concepto de base dual. Facede o primeiro problema do boletín do tema 2.
- O espazo cociente acompañaranos ao longo de todo o curso. Facede os dous primeiros problemas da actividade para entregar canto antes.
- Á hora de traballar cos endomorfismos, moitas veces estaremos en $\mathbb{C}$. Familiaridade con nocións como raíces da unidade.

Álxebra Linear e Multilineal

Grao en Matemáticas

Área de Álxebra (Departamento de Matemáticas)

11/09/2023

Segundo curso do Grao de Matemáticas (e programas de dobre titulación)