Álxebra Linear e Multilineal. Grao en Matemáticas. USC.
Lista de exercicios, tema 3. Estrutura das aplicacións lineais.
Vectores propios e diagonalización.

Problema 1. Achar os valores propios racionais, reais e complexos das seguintes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & -13 & 10 \\ 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -15 & -17 \\ 1 & -7 & -6 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -4 & 28 & -4 \end{pmatrix}.$$

Problema 2. Encontrar os valores e vectores propios das matrices seguintes e dicir se son ou non diagonalizables.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 20 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 3. Encontrar a matriz na base canónica dun endomorfismo $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que:

(i) $f(e_1) + f(e_3) = e_1 + e_3$.

(ii) $f(e_1) + f(e_2) = e_1 + e_2$.

(iii) Os vectores do subespazo $U \cap V$ obtido mediante a intersección de $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } z + y - 2x = 0\}$ e $V = \langle (2, 0, 3), (1, 0, 1) \rangle$ son vectores propios de valor propio -1.

Problema 4. Sabendo que $(1, 2)$ e $(1, 3)$ son vectores propios dunha matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de valores propios -1 e 3, respectivamente, calcular A^n para $n \geq 1$.

Problema 5. Demostrar que os endomorfismos $f, g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definidos por

$$f(A) = A^t \quad \text{e} \quad g(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$$

son ambos diagonalizables e encontrar unha base de vectores propios para cada un.

Problema 6. Determinar os endomorfismos f de $\mathbb{R}^3$ que verifiquen as condicións que se especifican e, en cada caso, calcular o seu polinomio característico.

(a) Que teña os vectores propios $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ con valores propios 2, 1 e -1, respectivamente.

(b) Que teña núcleo $\ker(f) = \langle (0, 0, 1) \rangle$ e tal que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } x + y = z\}$ sexa o subespazo xerado polos vectores propios de valor propio 2.

(c) Que teña un único valor propio real, núcleo $\ker(f) = \langle (0, 0, 1) \rangle$ e tal que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } x + y = z\}$ sexa un subespazo vectorial invariante.

(d) Non diagonalizable e tal que $(1, 0, 0)$ e $(0, -1, 1)$ sexan vectores propios de valor propio -1.

Problema 7. Consideramos o endomorfismo $f : \mathbb{C}[x]_3 \to \mathbb{C}[x]_3$ dado por

$$f(p(t)) = p(t) + p(1)(t-3) - 2p'(1)(t-1)$$

Encontrar os valores propios e os vectores propios de f e discutir se o endomorfismo diagonaliza.

Problema 8. Sexa $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Calcular a matriz da aplicación lineal $f_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por $X \mapsto AX - XA$. Calcular a matriz da aplicación lineal e achar o seu rango.

(b) Cal é a relación entre a dimensión do núcleo de f_A e o grao do polinomio mínimo de A?

(c) Se $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, e $a = d$, $a' = b'$ e $b = c' = 0$, demostrar que os núcleos de f_A e f_B teñen un plano común.

(d) Dar unha condición necesaria e suficiente para que $\ker(f_A) + \ker(f_B) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Subespazos invariantes e polinomio mínimo.

Problema 9. Sexa f o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(x, y, z) = (x + y, x + ay - z, -x + y - bz).$$

(a) Determinar os valores de a e b para os cales o vector $(1, 1, 0)$ é un vector propio de f e o subespazo $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } y + z = 0\}$ é un subespazo invariante por f.

(b) Determinar os valores de a e b para os cales 1 é un valor propio de f. Para que valores 1 é valor propio de f con multiplicidade alxébrica 2?

Problema 10. Sexa $f \in \mathrm{End}(V)$ e sexa $U \subset V$ un subespazo propio. Sexa $f|_U \in \mathrm{End}(U)$ a restrición do endomorfismo ao subespazo U. Demostrar que o polinomio característico $\mathrm{Char}(f|_U; X)$ divide ao polinomio característico $\mathrm{Char}(f; X)$.

Problema 11. Sexa $f \in \mathrm{End}(V)$ e sexa $U \subset V$ un subespazo propio. Sexa $W = V/U$ o espazo vectorial cociente correspondente. Comprobar que a aplicación $f|_W : W \longrightarrow W$ definida por $f|_W([v]) = [f(v)]$ está ben definida e é un endomorfismo de W. Demostrar que

$$\mathrm{Char}(f; X) = \mathrm{Char}(f|_U; X)\mathrm{Char}(f|_W; X).$$

Problema 12. Sexa f un endomorfismo dun $\mathbb{R}$-espazo vectorial E de dimensión finita. Demostrar que o endomorfismo f ten como mínimo un valor propio se e soamente se existe como mínimo un subespazo invariante por f de dimensión impar.

Problema 13. Sexa E un espazo vectorial de dimensión finita e sexa $f : E \longrightarrow E$ un endomorfismo que cumpre $f^2 = f$.

(a) Demostrar que f diagonaliza.

(b) Demostrar que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

(c) Dar unha fórmula para expresar un vector v de E como suma dun do núcleo e outro da imaxe.

Problema 14. Probar que unha matriz cadrada A de orde n con entradas reais e diagonalizable sobre os números complexos en calquera dos seguintes casos.

(a) Se ten inversa e esta cumpre que $A^{-1} = 2\mathbf{I}_n - A^3/2$.

(b) Se o seu polinomio característico é igual a $-X^5 - X^3 + X^2 + 1$.

(c) Se as matrices A^2 e $A^3 + A - \mathbf{I}_n$ son inversas.

Problema 15. Unha matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ dise que é nilpotente se existe un enteiro $k \geq 1$ tal que $A^k = 0$. Sexa A unha matriz nilpotente.

(a) Demostrar que A é conxugada dalgunha matriz triangular superior estrita (é dicir, unha matriz (u_{ij}) con entradas $u_{ij} = 0$ se $i \geq j$).

(b) Demostrar que $A^n = 0$.

(c) Encontrar o polinomio característico da matriz A e, usando este, encontrar o da matriz $A + \mathbf{I}_n$.

(d) Calcular $\det(A + \mathbf{I}_n)$.

(e) Demostrar que $\det(A + B) = \det(B)$ para toda matriz $B \in \mathcal{M}_n(K)$ que conmute con A.

Problema 16. Sexa A unha matriz cadrada real de orden n de maneira que $A^5 = \mathbf{I}_n$. Probar que se A diagonaliza sobre $\mathbb{R}$, entón $A = \mathbf{I}_n$.

Problema 17. Sexa $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ unha matriz con traza t. Demostrar que se t é un valor propio de A, entón $A^m = t^{m-1}A$ para todo natural $m \geq 1$.

Problema 18. Sexan $f, g \in \mathrm{End}(E)$ endomorfismos dun espazo vectorial de dimensión finita. Demostrar que se v é un vector propio de $g \circ f$ de valor propio $\lambda \neq 0$, entón $f(v)$ é un vector propio de $f \circ g$ de valor propio λ. Que pasa se $\lambda = 0$? Demostrar que se $g \circ f$ é invertible e diagonalizble, entón $f \circ g$ tamén é diagonalizable.

Forma de Jordan.

Problema 19. Calcular bases de Jordan dos endomorfismos definidos polas seguintes matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 15 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Problema 20. Calcular bases de Jordan dos endomorfismos definidos polas seguintes matrices

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 & 0 \\ -4 & 4 & -20 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Problema 21. Determinar tódalas posibles formas de Jordan para un endomorfismo de polinomio característico $-(x-2)^3(x-5)^2$.

Problema 22. Achar, en cada un dos seguintes casos, a forma canónica de Jordan dun endomorfismo f se o seu polinomio característico é x^7.

(a) As dimensións dos núcleos de f e f^2 son 3 e 6, respectivamente.

(b) As dimensións dos núcleos de f, f^2 e f^3 son 3, 5 e 7, respectivamente.

(c) As dimensións dos núcleos de f e f^3 son 3 e 6, respectivamente.

Problema 23. Considérase o endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x,y,z,t) = (2x, 4y-14z+5t, y-4z+2t, y-6z+4t).$$

Encontrar os seus vectores propios e os vectores propios xeralizados, dar unha base de vectores propios xeralizados e a matriz de f nesta base.

Problema 24. Encontrar tódalas matrices A tales que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 13 & -25 & 3 \end{pmatrix}.$$

Problema 25. Encontrar a forma de Jordan dun endomorfismo $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ que cumpre as seguintes catro condicións.

(i) $f(e_1)+f(e_2)+f(e_3) = (1,1,1)$.

(ii) $f(e_1)-f(e_2) = f(1,1,-2)$.

(iii) $f^2 = f$.

(iv) O subespazo $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } y+2z=0\} \cap \langle (1,1,0),(1,0,1)\rangle$ é invariante por f.

Problema 26. Dar a matriz do endomorfismo $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ que cumpre as seguintes cinco condicións.

(i) $\langle e_1, e_2\rangle$ e $\langle e_3\rangle$ son subespazos invariantes por f.

(ii) $\ker(f) = \langle (1,2,0)\rangle$.

(iii) A matriz de f na base canónica é simétrica.

(iv) $\mathrm{Tr}(f) = 6$.

(v) 1 é un valor propio de f.

Problema 27. Sexa $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ o endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que na base canónica ten por matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontrar a forma de Jordan e unha base de Jordan, e encontrar tódolos subespazos vectoriais invariantes por f.

Problema 28. Calcular J^n, onde $J \in \mathcal{M}_6(K)$ é a matriz diagonal por bloques que ten na diagonal

$$J_1 = (\lambda), \quad J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Problema 29. A evolución temporal dunha poboación de árbores está descrita polo seguinte modelo matemático:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a/5 \\ 1 & 9/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

con $a \in \mathbb{R}$ un parámetro e onde x_n e y_n representan as densidades das clases de árbores en formación e as clases de árbores formados, respectivamente.

(a) Para que valores de a é $\lambda = 1$ un valor propio da matriz?

(b) Para $a = 1$, encontrar a forma de Jordan e unha base de Jordan da matriz. Estudar o comportamento a longo prazo da poboación de árbores.

(c) Para $a = -4/5$, encontrar a forma de Jordan e unha base de Jordan da matriz.

(d) Estudar o comportamento a longo prazo da poboación para $a \geq -4/5$.

Problema 30. Achar a forma canónica de Jordan dun endomorfismo que ten polinomio característico $-(x-2)^4(x-5)^3$ e no que os subespazos de vectores propios asociados aos valores propios 2 e 5 teñen dimensións 3 e 1, respectivamente.