Álxebra Linear e Multilineal. Grao en Matemáticas. USC.
Lista de exercicios, tema 2. Aplicacións multilineais e determinantes.
Repaso de espazo dual e espazo cociente.

Problema 1. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, sexa $\phi_\alpha : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicación que a un polinomio $P(X)$ lle fai corresponder o seu valor $P(\alpha)$. Sexan $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ unha familia de $n+1$ números reais diferentes.

(a) Demostrar que as $n+1$ formas lineais $\phi_{\alpha_0}, \ldots, \phi_{\alpha_n}$ son unha base do espazo dual $\mathbb{R}_n[X]^*$. Sexa $\mathcal{B} = \{P_0(X), \ldots, P_n(X)\}$ a base de $\mathbb{R}_n[X]$ que a ten por dual.

(b) Encontrar as coordenadas dun polinomio $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ na base $\mathcal{B}$.

(c) Demostrar que, dados $n+1$ números reais calquera $\beta_0, \ldots, \beta_n$, o polinomio

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i P_i(X)$$

é o único polinomio de $\mathbb{R}_n[X]$ tal que $P(\alpha_i) = \beta_i$ para todo $i = 0, \ldots, n$.

(d) Encontrar a base $\{P_i(X)\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ que ten como dual a base $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.

(e) Sexan $a < b$ dous números reais. Demostrar que existe unha única $(n+1)$-tupla de números reais $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$\int_a^b P(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} x_i P(\alpha_i)$$

para todo polinomio $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.

(f) Calcular os coeficientes $x_i \in \mathbb{R}^4$ que corresponden á forma lineal $\int_0^1 P(t)\,dt$ de $\mathbb{R}_3[X]$ e aos números $\alpha_i = 0, 1, 2, 3$.

Problema 2. O obxectivo deste problema é demostrar o segundo e o terceiro teorema de isomorfismo.

(a) Sexan $V, W \subset U$ subespazos vectoriais. Consideremos a aplicación lineal

$$V \hookrightarrow V + W \twoheadrightarrow (V+W)/W$$

definida como a composición da inclusión coa proxección natural no espazo cociente, que envía cada vector $v \in V$ á clase $[v] = v + W \subset V + W$. Demostrar que a aplicación é sobrexectiva, calcular o seu núcleo e establecer un isomorfismo de $(V+W)/W$ cun espazo cociente do espazo V.

(b) Sexan $W \subset V \subset U$ inclusións de espazos vectoriais. Demostrar que a aplicación $U/W \to U/V$ que envía $[u]_W = u + W$ á clase $[u]_V = u + V$ está ben definida e é sobrexectiva. Calcular o seu núcleo e deducir un isomorfismo entre U/V e un espazo cociente do espazo U/W.

Unha demostración alternativa do teorema de Cayley–Hamilton.

Problema 3. Sexa K un corpo. Neste problema, imos considerar polinomios con coeficientes en $M_n(K)$, é dicir, expresións do tipo $P(X) = P_0 + P_1X + \ldots + P_rX^r$, con $P_i \in M_n(K)$. Se $Q(x) = Q_0 + Q_1X + \ldots + Q_sx^s$ é outro polinomio con coeficientes en $M_n(K)$, o polinomio produto de $P(X)$ por $Q(X)$ é, por definición, $P(X)Q(X) = \sum_{k=0}^{r+s} R_kX^k$, con $R_k = \sum_{i+j=k} P_iQ_j$.

(a) Sexan $A, B \in M_n(K)$ e consideremos os polinomios

$$P(X) = B - \mathbf{I}_n X, \quad Q(x) = A - \mathbf{I}_n X \quad \text{e} \quad R(X) = P(X)Q(X),$$

onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de orde n. Probar que se $C \in M_n(K)$ cumpre que $AC = CA$, entón $R(C) = P(C)Q(C)$. Dar un contraexemplo a esta igualdade no caso no que C non conmuta con A.

(b) Máis xeralmente, consideremos dous polinomios

$$P(X) = P_0 + P_1 X + \ldots + P_r X^r, \quad Q(X) = Q_0 + Q_1 X + \ldots + Q_s X^s,$$

con $P_i, Q_j \in M_n(K)$. Sexa $P(X) = P(X)Q(X)$. Probar que se $C \in M_n(K)$ cumpre $Q_j C = C Q_j$, para todo j, entón $R(C) = P(C)Q(C)$.

(c) Sexa $Q(X) = A - \mathbf{I}_n X$. Considerando $Q(X)$ como matriz (con coeficiente en $K[X]$), sexa $P(X)$ as trasposta da matriz de adxuntos de $Q(X)$. Utilizade a igualdade

$$P(X)Q(X) = \det(A - X\mathbf{I}_n)\mathbf{I}_n$$

e o apartado anterior para deducir o teorema de Cayley–Hamilton.

Aplicacións da forma de Jordan.

Problema 4. Nunha poboación, estableceuse un tratamento contra unha praga de insectos. En cada aplicación de insecticida, a poboación cambia segundo a relación

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

onde x_n, y_n e z_n representan as cantidades de ovos, eirugas e adultos, respectivamente.

(a) Encontrar a forma de Jordan e unha base de Jordan da matriz.

(b) Calcular o número mínimo de aplicacións do insecticida para acabar coa praga, independentemente da poboación inicial.

(c) Cal é o número mínimo de aplicacións para acabar coa praga formada se hai 9576 ovos, 3457 eirugas e 9576 adultos?