CÁLCULO DE PRIMITIVAS
Cálculo en una variable
Óscar Rivero Salgado

Dada una función $f(x)$, una *primitiva* de $f(x)$ es una función $F(x)$ tal que

$$F'(x) = f(x).$$

Comenzamos con un repaso de primitivas elementales para luego abordar de forma sistemática la integración de las integrales de funciones racionales. A continuación, se presentan los métodos de integración por partes y por cambio de variable, que son los análogos a la fórmula del producto y la regla de la cadena, respectivamente. Por último, se exploran algunas integrales trigonométricas bastante frecuentes en la literatura. En todos los casos, $\mathcal{C}$ se refiere a la *constante de integración*.

1. Integrales inmediatas

Las siguientes integrales se basan en identificar una función cuya derivada coincide con la expresión que se nos da en cada caso. Las funciones que aparecen a continuación son muy sencillas: polinomios, fracciones algebraicas, exponenciales, logaritmos, expresiones trigonométricas o hiperbólicas...

1. $$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \mathcal{C}.$$

2. $$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \arcsin(x-1) + \mathcal{C}.$$

3. $$\int e^{e^x} e^x\,dx = e^{e^x} + \mathcal{C}.$$

4. $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx = \frac{\arcsin(x^2)}{2} + \mathcal{C}.$$

5. $$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + \mathcal{C}.$$

6. $$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + \mathcal{C}.$$

7. $$\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + \sec x + \mathcal{C}.$$

8. $$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \log|\log|x|| + \mathcal{C}.$$

9.
$$\int \log(\cos x) \tan x \, dx = -\frac{1}{2}(\log|\cos x|)^2 + \mathcal{C}.$$

10.
$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} \, dx = \frac{\tan(x^2)}{2} + \mathcal{C}.$$

11.
$$\int \frac{1}{\cosh x} \, dx = 2\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} \, dx = 2\arctan(e^x) + \mathcal{C}.$$

12.
$$\int \frac{1}{x \log x \log(\log x)} \, dx = \log|\log|\log|x||| + \mathcal{C}.$$

2. Integrales racionales

En esta sección pretendemos explorar integrales del tipo

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx,$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

Definición 1. *Sea k un cuerpo. El cuerpo se funciones racionales sobre k se define como*

$$k(x) = \Big\{ \frac{p(x)}{q(x)} \text{ con } p(x), q(x) \in k[x], \quad q(x) \neq 0 \Big\}.$$

Este conjunto tiene estructura de k-espacio vectorial.

Una vez sabemos que es un k-espacio vectorial (de dimensión infinita) es natural introducir una base canónica. Recordemos que una base está formada por un conjunto de elementos independientes (no hay ninguna combinación lineal finita de estos elementos que sea igual a 0) que generan todo el espacio (dada una función racional cualquiera, se puede escribir como combinación lineal de un número finito de elementos de la base.

Proposición 1 (Teorema de descomposición en fracciones simples)**.** *El conjunto $S \cup T$, con*

$$S = \{x^\ell \text{ con } \ell \geq 0\},$$

$$T = \Big\{ \frac{a(x)}{b(x)^r} \text{ con } a(x), b(x) \text{ mónicos, } \operatorname{gr}(a(x)) < \operatorname{gr}(b(x)),\ b(x) \text{ irreducible y } r \geq 0 \Big\}$$

es una base del k-espacio vectorial $k(x)$.

La demostración de este hecho es rutinaria. Vamos a dar algunas indicaciones de cómo proceder en el caso general y a continuación describiremos explícitamente cómo trabajar en el caso en el que $k = \mathbb{R}$.

1. En primer lugar, uno observa que si $q(x)$ y $r(x)$ son dos polinomios en $k[x]$ relativamente primos, entonces existen polinomios $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ de forma que

$$\frac{p(x)}{q(x)r(x)} = \frac{\alpha(x)}{q(x)} + \frac{\beta(x)}{r(x)}.$$

Esto es un ejemplo más de la *identidad de Bézout*, pero aplicada no a $\mathbb{Z}$, sino al anillo $k[x]$. Al igual que sucede con los enteros, este es un anillo *principal*, y en todos ellos podemos aplicar dicho algoritmo. Más en general, se demuestra que si el grado de $p(x)$ es menor que el de $q(x)r(x)$, los polinomios $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ se pueden tomar de manera que sus grados sean menores que los de $q(x)$ y $r(x)$, respectivamente.

2. A continuación, resulta sencillo concluir la prueba del teorema una vez tenemos que descomponer únicamente polinomios del tipo $\frac{p(x)}{q(x)^r}$, donde el grado de $p(x)$ es menor que el de $p(x)^r$. Esto es, existen polinomios $a_1(x), \ldots, a_r(x)$ cuyos grados son menores que el grado de $q(x)$ de manera que

$$\frac{p(x)}{q(x)^r} = \sum_{j=1}^{r} \frac{a_i(x)}{q(x)^j}.$$

Una manera alternativa de abordar la demostración de este teorema es planteando un sistema de ecuaciones que resulta ser compatible determinado. Esto tiene la ventaja de que da un algoritmo explícito para encontrar la descomposición en fracciones simples, que es lo que nos interesará desde el punto de vista de la integración. Grosso modo, hay 3 procedimientos que uno puede seguir para obtener la descomposición en fracciones simples una vez hemos hecho la división euclídea y el grado del numerador es menor que el del denominador, aunque el último de ellos tiene un rango de aplicaciones limitado:

1. Reducir a común denominador para tener un sistema de ecuaciones lineal con tantas ecuaciones como incógnitas (igualando los coeficientes de x^i, donde i está entre 0 y el grado del polinomio del denominador).

2. Usar la identidad de Bézout (algoritmo de Euclides extendido).

3. Procediendo como en la primera opción, evaluar la igualdad en ciertos valores que sean ceros del denominador (lo que dará lugar a ecuaciones más sencillas). También se pueden evaluar las derivadas de los polinomios que obtengamos. Por ejemplo, si ponemos
$$\frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1}$$
tendremos que
$$x + 3 = A + B(x-1).$$
Evaluando en $x = 1$ resulta que $A = 4$, y derivando la expresión resulta directamente que $B = 1$.

De ahora en adelante, supondremos que $k = \mathbb{R}$; la base la forman por tanto los siguientes elementos:

- Polinomios del tipo x^k (con $k \geq 0$).
- Fracciones del tipo $\frac{1}{(x-\alpha)^k}$, con $k \geq 1$.
- Fracciones del tipo $\frac{x-\alpha}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$, donde $\beta^2 - 4\gamma < 0$ y $k \geq 1$.

En particular, si

$$q(x) = \prod_{i=1}^{M}(x+\alpha_i)^{r_i} \prod_{i=1}^{N}(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{s_i}, \quad \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0,$$

el cociente $\frac{p(x)}{q(x)}$ se puede descomponer como

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \text{polinomio} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(x+\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s_i} \mu_{i,j} \cdot \frac{x+\delta_{i,j}}{(x^2+\beta_i+\gamma_i)^j}.$$

Una vez tenemos hecha la descomposición (usando cualquiera de los procedimientos que explicamos en el caso general), es necesario saber integrar cada elemento de la base:

1. Si $k \geq 0$,
$$\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathcal{C}.$$
2. Si $k = 1$,
$$\int \frac{1}{(x-\alpha)}\,dx = \log|x-\alpha| + \mathcal{C};$$
si $k > 1$,
$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + \mathcal{C}.$$
3. Si $k = 1$,
$$\begin{aligned}\int \frac{x+a}{x^2+bx+c} &= \int \frac{x+b/2}{x^2+bx+c}\,dx + (a-b/2)\cdot\int \frac{1}{(x+b/2)^2+(c-b^2/4)}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log|x^2+bx+c| + \frac{a-b/2}{c-b^2/4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+b/2}{(c-b^2/4)^{1/2}}\right)^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log|x^2+bx+c| + \frac{a-b/2}{(c-b^2/4)^{1/2}}\arctan\left(\frac{x+b/2}{(c-b^2/4)^{1/2}}\right) + \mathcal{C};\end{aligned}$$
si $k \geq 2$, entonces existe un polinomio $\mathfrak{p}(x)$ de grado menor que $2k-2$ y un polinomio $\mathfrak{q}(x)$ de grado menor que 2 de forma que
$$\int \frac{x+a}{(x^2+bx+c)^k}\,dx = \frac{\mathfrak{p}(x)}{(x^2+bx+c)^{k-1}} + \int \frac{\mathfrak{q}(x)}{x^2+bx+c}\,dx.$$
Para encontrar estos polinomios, se deriva la expresión anterior, se reduce a común denominador y se plantea un sistema de $2k$ ecuaciones igualando los coeficientes que acompañan a $x^0, x^1, \ldots, x^{2k-1}$ a cada lado.

Para ilustrar esto último, observemos por ejemplo que

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x + \mathcal{C}.$$

Ahora procedemos a hacer algunos ejemplos.

1.
$$\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx = 2\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$$
$$= -\frac{2}{x-1} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \mathcal{C}.$$

2.
$$\int \frac{x^2-x+12}{(x-1)^2(x+2)}\,dx = -\frac{1}{x-1}\,dx + 4\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x+2}\,dx$$
$$-\log|x-1| - \frac{4}{x-1} + 2\log|x+2| + \mathcal{C}.$$

3.
$$\int \frac{x+3}{x^2+x+2}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+x+2| + \frac{5}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + \mathcal{C}.$$

4.
$$\int \frac{x^3}{x^3+1} = x - \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$$
$$x - \frac{1}{3}\log|1+x| + \frac{1}{6}\log|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \mathcal{C}.$$

3. Integrales por partes

La integración por partes se basa en explotar la fórmula de Leibnitz para el producto,
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$
Por consiguiente, si $u(x)$ i $v(x)$ son funciones diferenciables, se tiene que
$$\int (uv') = uv - \int (vu').$$

1.
$$\int x \arctan x\,dx.$$

Sea $u = \arctan x$ y $v = x^2/2$. De esta manera, el resultado es
$$\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot \arctan x + \mathcal{C}.$$

2.
$$\int x(\log x)^2\,dx.$$

Hacemos primero la integración por partes con $u = (\log x)^2$ y $v = x^2/2$; luego repetimos lo mismo con $u = \log x$ y $v = x^2/2$. De esta manera,
$$\int x(\log x)^2\,dx = \frac{x^2(\log|x|)^2}{2} - \int \log x \cdot x\,dx = \frac{x^2(\log|x|)^2}{2} - \frac{x^2\log|x|}{2} + \frac{x^2}{4} + \mathcal{C}.$$

3.
$$\int \log \sqrt{1+x^2}\, dx.$$
Sea $u = \log 1 + x^2$ y $v = x$. Entonces el resultado es
$$x \log \sqrt{1+x^2} - x + \arctan x + \mathcal{C}.$$

4.
$$\int x^3 e^{x^2}\, dx.$$
En este caso hacemos $u = x^2/2$ y $v = e^{x^2}$ y resulta directamente
$$\frac{e^{x^2} x^2}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + \mathcal{C}.$$

5.
$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx.$$
Primero hacemos $u = e^{ax}$ y $v = \frac{1}{b}\sin(bx)$; luego ponemos $u = e^{ax}$ y $v = -\frac{1}{b}\cos(bx)$. De esta forma obtenemos que la primitiva coincide con
$$\frac{e^{ax}}{b}\sin(bx) + \frac{ae^{ax}}{b^2}\cos(bx) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos(bx)\, dx,$$
con lo que la integral buscada es igual a
$$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(b\sin(bx) + a\cos(bx)\Big) + \mathcal{C}.$$

4. Integrales por cambio de variable

La integración por cambio de variable se basa en la idea siguiente: si $f'(x) = F(x)$, entonces $(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = F(g(x))g'(x)$, donde $g(x)$ ha de ser una función derivable. En cierta manera, es el análogo a la regla de la cadena en la teoría de la integración.
Si $f(x)$ es una función continua y $\phi(x)$ es derivable continuidad y además $\phi'(x) \neq 0$, entonces
$$\int f(x)\, dx = \Big(f(\phi(t))\phi'(t)\, dt\Big)\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}.$$

1. Cambio trigonométrico estándar:
$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx.$$
Ponemos $x = \sin t$, de manera que $dx = \cos t\, dt$. La integral se convierte entonces en
$$\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2t))\, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + \mathcal{C}.$$
Ahora deshacemos el cambio, poniendo $t = \arcsin(\sqrt{x})$. En particular, usamos las relaciones
$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \text{ porque } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,$$

$$\sin(2\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}, \text{ por las fórmulas del ángulo doble.}$$

Por consiguiente, el valor de la primitiva es

$$\frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \mathcal{C}.$$

2. Repetimos el mismo cambio:

$$\int \sqrt{-x^2+2x}\, dx = \int \sqrt{1-(x-1)^2}\, dx$$

$$= \frac{\arcsin(x-1)}{2} + \frac{(x-1)\sqrt{-x^2+2x}}{2} + \mathcal{C}.$$

3. Cambio hiperbólico estándard:

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx.$$

Ponemos $x = \sinh t$, de manera que $dx = \cosh t\, dt$. La integral queda

$$\int \cosh^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int (1+\cosh(2t)) = \frac{t}{2} + \frac{\sinh t}{4} + \mathcal{C}.$$

Deshaciendo el cambio, el valor es

$$\frac{\operatorname{arcsinh} x}{2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \mathcal{C}.$$

Nota. Aquí también podemos poner $t = \tan(x)$ y usar que $1+\tan^2 x = \sec^2 x$; sin embargo, esto requiere resolver algunas primitivas trigonométricas más difíciles.

4. Otro cambio hiperbólico estándard:

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx.$$

Ponemos $x = \cosh t$, de manera que $dx = \sinh t\, dt$. La integral queda

$$\int \sinh^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int (-1+\cosh(2t)) = -\frac{t}{2} + \frac{\sinh(2t)}{4} + \mathcal{C}.$$

Deshaciendo el cambio, el valor es

$$-\frac{\operatorname{arccosh} x}{2} + \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \mathcal{C}.$$

5. Insistiendo sobre la idea del cambio hiperbólico:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}\, dx.$$

Sea $x = 4\cosh t$. De esta manera la integral buscada coincide con

$$16\int \cosh^2 t\, dt = 8t + 8\sinh t\cosh t + \mathcal{C}$$

$$= 8\operatorname{arccosh}(x/4) + 2x\sqrt{(x/4)^2-1} + \mathcal{C}.$$

6. Cambio trigonométrico un poco más elaborado:

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx.$$

Hacemos el cambio de variable $x = \sin^2 t$, de donde $dx = 2\sin t\cos t dt$. Por tanto, la integral se convierte en

$$\int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{1-\sin t}\cdot 2\sin t\cos t\,dt = \int \frac{2\sin t\cos^2 t}{1-\sin t}\,dt = \int \frac{2(1-\sin^2 t)\sin t}{1-\sin t}\,dt$$

$$= \int 2\sin t\,dt + \int 2\sin^2\,dt = -2\cos t + t - \frac{\sin(2t)}{2} + \mathcal{C}.$$

Ahora simplemente tenemos que deshacer el cambio, poniendo $t = \arcsin(\sqrt{x})$. En particular, usamos las relaciones

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \text{ porque } \sin^2(x)+\cos^2(x) = 1,$$

$$\sin(2\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}, \text{ por las fórmulas del ángulo doble.}$$

Uniendo todo esto, nos queda que el valor de la primitiva es

$$-2\sqrt{1-x} + \arcsin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x} + \mathcal{C}.$$

7. Una integral racional:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Sea $t = x^{1/6}$. Entonces la integral queda como

$$6\int \frac{t^8-1+1}{1+t^2}\,dt = \frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} + \frac{6t^3}{3} - 6t + 6\arctan t + \mathcal{C}$$

$$\frac{6x\sqrt[6]{x}}{7} - \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\arctan(\sqrt[6]{x}) + \mathcal{C}.$$

8. Un ejemplo con el logaritmo:

$$\int \frac{\log(3x)}{x\log(6x)}\,dx.$$

Sea $t = \log(3x)$, de forma que $dt = dx/x$. Entonces la integral a calcular es

$$\int \frac{t}{t+\log 2}\,dt = t - \log 2\log(t+\log 2) + \mathcal{C}$$

$$= \log(|3x|) - \log 2\log(|\log(|3x|) + \log 2|) + \mathcal{C}.$$

9. Obteniendo una integral racional:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx.$$

Sea $t = \sqrt{1+e^x}$. Entonces la integral pasa a ser

$$2\int \frac{dt}{t^2-1} = \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \mathcal{C} = \log\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + \mathcal{C}.$$

5. Integrales trigonométricas

En los primeros ejemplos que presentamos a continuación, recurrimos con frecuencia a los trucos propios de las integrales inmediatas. En los siguientes, recordamos que dada una primitiva de la forma

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

donde R es una función racional, siempre se puede hacer el cambio de variable $t = \tan(x/2)$, con el que resulta

$$dx = \frac{2\, dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Estas integrales suelen resultan complicadas, con raíces múltiples y en muchos casos complejas. Por eso a veces se utilizan ciertas simetrías: si R es impar en $\sin x$, hacemos $t = \cos x$; si R es impar en $\cos x$, hacemos $t = \sin x$; y si R es par tanto en $\sin x$ como en $\cos x$, se hace $t = \tan x$.

1. $$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos x\, dx - \int \sin^2 x \cos x\, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + \mathcal{C}.$$

2. $$\int \sin^2 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + \mathcal{C}.$$

3. $$\int \cos^6(x/2)\, dx = \int \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^3 dx$$
$$= \frac{x}{8} + \frac{3\sin x}{8} + \frac{3\sin(2x)}{32} + \frac{3x}{16} + \frac{\sin x}{8} - \frac{\sin^3 x}{24} + \mathcal{C}$$
$$= \frac{5x}{16} + \frac{\sin(x)}{2} + \frac{3\sin(2x)}{32} - \frac{\sin^3 x}{24} + \mathcal{C}.$$

4. $$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int \cos^2 x \sin x\, dx - \int \cos^4 x \sin x\, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + \mathcal{C}.$$

5. $$\int \sinh^2 x\, dx = \int \left(\frac{\cosh(2x)-1}{2}\right) dx = \frac{\sinh(2x)}{4} - \frac{x}{2} + \mathcal{C}.$$

6. $$\int \frac{1}{\sin x}\, dx.$$

   Haciendo el cambio de variable $t = \cos x$ nos queda que la integral a calcular es

   $$-\int \frac{1}{1-t^2}\, dt = \int \frac{-1/2}{1-t}\, dt + \int \frac{-1/2}{1+t}\, dt = \frac{1}{2}\log|1-t| - \frac{1}{2}\log|1+t| + \mathcal{C}.$$

   Deshaciendo el cambio nos queda

   $$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + \mathcal{C}.$$

7.
$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx.$$

Haciendo el cambio de variable $t = \sin x$ nos queda que la integral a calcular es

$$\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int \frac{1/2}{1-t}\,dt + \int \frac{1/2}{1+t}\,dt = -\frac{1}{2}\log|1-t| + \frac{1}{2}\log|1+t| + \mathcal{C}.$$

Deshaciendo el cambio nos queda

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + \mathcal{C}.$$

8.
$$\int \tan^4 x\,dx.$$

Haciendo el cambio $t = \tan x$ nos queda que la integral a calcular es

$$\int \frac{t^4-1+1}{t^2+1}\,dt = \frac{t^3}{3} - t + \arctan(t) + \mathcal{C} = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + \mathcal{C}.$$

9.
$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{1-\cos x}\,dx &= \int \frac{\sin x(\cos x-1)}{1-\cos x}\,dx + \int \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx\\ &= \cos x + \log|1-\cos x| + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

10.
$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$$

Hacemos $t = \tan(x/2)$, con lo que resulta

$$\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \log|t| + \mathcal{C}.$$

Deshaciendo el cambio, nos que

$$\log\Big|1+\tan(x/2)\Big| + \mathcal{C}.$$