TEMA 2. APLICACIÓNS MULTILINEAIS E DETERMINANTES
Apuntamentos de clase da materia de Álxebra Linear e Multilinear.

Sexa K un corpo e E un K-espazo vectorial de dimensión n con base $e = e_1, \ldots, e_n$. O espazo dual de E, que denotamos como E^*, é o conxunto das aplicacións lineais $f : E \longrightarrow K$. Á base e podémoslle asociar unha base do espazo dual, $e^* = e_1^*, \ldots, e_n^*$, que cumpre $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é a delta de Kronecker, que vale 1 se $i = j$ e 0 no resto dos casos.

1. Aplicacións multilineais

Imos comezar este tema traballando unha xeralización da noción de espazo dual.

Definición. Unha aplicación p-lineal ou tensor p-covariante de E é unha aplicación

$$f : E \times \overset{p}{\cdots} \times E \longrightarrow K$$

que é lineal en cada unha das p compoñentes.
O conxunto das aplicacións p-lineais denótase como $\mathcal{L}_p(E^p, K)$ ou simplemente $T_p(E)$. No caso $p = 1$, recuperamos o espazo dual: $T_1(E) = E^*$.

É sinxelo ver que a suma de dúas aplicacións multilineais tamén o é, e o mesmo sucede para o produto por escalares. Polo tanto, $T_p(E)$ ten estrutura de espazo vectorial. Ese é o contido da seguinte proposición.

Proposición. O conxunto dos tensores p-covariantes, $T_p(E)$, ten estrutura de espazo vectorial.

Demostración. Cómpre ver que dadas $\varphi, \psi \in T_p(E)$ e $\lambda \in K$, tanto $\varphi + \psi$ como $\lambda\varphi$ son elementos de $T_p(E)$. Imos comprobar unicamente o caso de $\varphi + \psi$, dado que o outro é totalmente análogo.
Á súa vez, ver que $\varphi + \psi$ é multilineal require ver que respecta as sumas e os produtos por escalares en cada variable. Para a primeira, observamos que

$$\begin{aligned}
(\varphi + \psi)(x_1, \ldots, x_i + x_i', \ldots, x_p) &= \varphi(x_1, \ldots, x_i + x_i', \ldots, x_p) \\
&\quad + \psi(x_1, \ldots, x_i + x_i', \ldots, x_p) \\
&= \varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) + \varphi(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_p) \\
&\quad + \psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) + \psi(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_p) \\
&= (\varphi + \psi)(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) \\
&\quad + (\varphi + \psi)(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_p).
\end{aligned}$$

A primeira igualdade séguese da definición de $\varphi + \psi$; a segunda da linealidade φ e ψ; e a terceira da propiedade conmutativa de K e novamente da definición de $\varphi + \psi$. A segunda comprobación faise do mesmo xeito, observando que

$$\begin{aligned}
(\varphi + \psi)(x_1, \ldots, \mu x_i, \ldots, x_p) &= \varphi(x_1, \ldots, \mu x_i, \ldots, x_p) + \psi(x_1, \ldots, \mu x_i, \ldots, x_p) \\
&= \mu \cdot \varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) + \mu \cdot \psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) \\
&= \mu \cdot (\varphi + \psi)(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p).
\end{aligned}$$

□

Ademais, dadas dúas aplicacións multilineais, tamén é posible definir o seu produto.

Definición. Sexa $f \in T_p(E)$ e $g \in T_q(E)$, con $p, q \geq 0$. O produto tensorial de f e g, que denotamos por $f \otimes g$, é a aplicación

$$f \otimes g \,:\, E \overset{p}{\cdots} \times E \times E \overset{q}{\cdots} \times E \longrightarrow K$$

que cumpre que, se $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ e $y = (y_1, \ldots, y_q) \in E^q$, entón $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$.

O seguinte resultado baséase nunha comprobación rutineira.

Proposición. O produto tensorial $f \otimes g$ é un elemento de $T_{p+q}(E)$.

Demostración. Hai que comprobar que $f \otimes g$ respecta a suma e o produto por escalares en cada unha das variables. Faremos unicamente a comprobación para a suma, dado que a outra faise seguindo o mesmo razoamento. Sen perda de xeneralidade, imos comprobar a bilinealidade na compoñente i-ésima, supondo que $1 \leq i \leq p$, sendo o caso $p + 1 \leq i \leq p + q$ completamente análogo.

$$\begin{aligned}
(\varphi \otimes \psi)(x_1, \ldots, x_i + x_i', \ldots, x_{p+q}) &= \varphi(x_1, \ldots, x_i + x_i', \ldots, x_p) \cdot \psi(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) \\
&= (\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) + \varphi(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_p)) \\
&\cdot \psi(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) \\
&= (\varphi \otimes \psi)(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{p+q}) \\
&+ (\varphi \otimes \psi)(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_{p+q}).
\end{aligned}$$

A primeira igualdade séguese da definición de $\varphi \otimes \psi$; a segunda da linealidade φ; e a terceira da propiedade distributiva de K e novamente da definición de $\varphi \otimes \psi$. $\square$

Un dos exemplos máis importantes ocorre cando $f, g \in E^* = T_1(E)$. Entón, $f \otimes g : E \times E \to K$ é a aplicación lineal dada por $(u \otimes v)(x, y) = u(x)v(y)$, e é un tensor 2-covariante.

Observación. O produto tensorial non é conmutativo. Por exemplo, se E ten dimensión 2 e unha base é $e = e_1, e_2$, podemos considerar $f = e_1^* + e_2^*$ e $v = e_1^*$. Entón, $(f \otimes g)(e_1, e_2) = 0$, pero $(g \otimes f)(e_1, e_2) = 1$. Polo tanto, $f \otimes g$ e $g \otimes f$ son dous elementos diferentes de $T_2(E)$.

Porén, o produto tensorial si é asociativo e cumpre tamén a propiedade distributiva. Imos resumir algunhas das súas propiedades, cuxa comprobación é inmediata. Sexan $f, f' \in T_p(E)$, $g, g' \in T_q(E)$, $h \in T_r(E)$ e $\lambda \in K$.

(a) $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$.

(b) $(\lambda f) \otimes g = \lambda(f \otimes g) = f \otimes (\lambda g)$.

(c) $f \otimes (g + g') = f \otimes g + f \otimes g'$ e $(f + f') \otimes g = f \otimes g + f' \otimes g$.

O noso seguinte obxectivo é dar unha base de $T_p(E)$. Por simplicidade, imos comezar traballando o caso no que E é de dimensión 2 e $p = 2$. Fixamos unha base $e = e_1, e_2$ de E e imos considerar o seguinte conxunto de elemento de $T_2(E)$:

$$\mathcal{B} = \{e_1^* \otimes e_1^*, e_1^* \otimes e_2^*, e_2^* \otimes e_1^*, e_2 \otimes e_2^*\}.$$

Para ver que $\mathcal{B}$ é base, cómpre ver que xeran o espazo $T_2(E)$ e que son linealmente independentes. Para ver que son xeradores, sexa $f \in T_2(E)$. Entón

$$f(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = acf(e_1, e_1) + adf(e_1, e_2) + bcf(e_2, e_1) + bdf(e_2, e_2).$$

Polo tanto, podemos pór

$$f = f(e_1, e_1) \cdot e_1^* \otimes e_1^* + f(e_1, e_2) \cdot e_1^* \otimes e_2^* + f(e_2, e_1) \cdot e_2^* \otimes e_1^* + f(e_2, e_2) \cdot e_2^* \otimes e_2^*.$$

Para ver que son independentes, procederemos por contradición, supondo que temos unha igualdade

$$\varphi = a_{11} \cdot e_1^* \otimes e_1^* + a_{12} \cdot e_1^* \otimes e_2^* + a_{21} \cdot e_2^* \otimes e_1^* + a_{22} \cdot e_2^* \otimes e_2^* = 0.$$

Considerando a avaliación nos diferentes vectores da base, temos que $\varphi(e_1, e_1) = a_{11} = 0$, $\varphi(e_1, e_2) = a_{12} = 0$, $\varphi(e_2, e_1) = a_{21} = 0$ e $\varphi(e_2, e_2) = a_{22} = 0$. Isto amosa que tódolos coeficientes da combinación lineal son 0.
A demostración esténdese de maneira inmediata ao caso xeral.

Proposición. O espazo vectorial $T_p(E)$ ten dimensión n^p e unha base está dada polos vectores

$$\{e_{i_1}^* \otimes \overset{p}{\cdots} \otimes e_{i_p}^*\}_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n}.$$

Demostración. Dado un elemento $f \in T_p(E)$, podemos escribir

$$f = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) e_{i_1}^* \otimes \overset{p}{\cdots} \otimes e_{i_p}^*,$$

co cal o conxunto proposto xera todo o espazo. De xeito similar, supoñamos que existe unha combinación lineal igual a cero da forma

$$\varphi = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq n} a_{i_1, \ldots, i_p} \cdot e_{i_1}^* \otimes \overset{p}{\cdots} \otimes e_{i_p}^* = 0.$$

Avaliando nas p-tuplas formadas por vectores da base, vemos que

$$0 = \varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) = a_{i_1, \ldots, i_p},$$

co cal tódolos coeficientes terían que ser 0. □

O seguinte obxectivo é definir o determinante, pero o espazo $T_p(E)$ resulta demasiado grande para os nosos propósitos. Volvamos ao caso no que E ten dimensión 2 e $p = 2$. Nese caso, $T_p(E)$ ten dimensión 4. O determinante vai ser, efectivamente, unha aplicación multilineal $D : E \times E \longrightarrow K$. Porén, ímoslle esixir, polo menos, dúas propiedades adicionais:

(a) $D(v, v) = 0$, para todo $v \in E$.

(b) $D(v, w) = -D(w, v)$, para todo $v \in E$.

Estas condicións simplemente expresan que o determinante dunha matriz coas dúas columnas iguais é igual a 0, e que permutar dúas columnas cambia de signo o determinante. O conxunto das aplicacións multilineais que cumpren estas dúas novas propiedades ten dimensión 1, co cal é suficiente dar os valores sobre unha base (e_1, e_2). Para estender esta construción, cómpre introducir o grupo de permutacións (grupo simétrico) e o concepto de *signo* dunha permutación.

2. O grupo simétrico

Definición. Unha permutación de p elementos é unha aplicación bixectiva

$$s : \{1, \dots, p\} \longrightarrow \{1, \dots, p\}.$$

Ao conxunto destas permutacións chámaselle grupo simétrico e denótase como S_p.

Un elemento do grupo simétrico adoitamos representalo da forma

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(p) \end{pmatrix}.$$

O nome de grupo simétrico vén do feito de que efectivamente, coa composición, S_p ten estrutura de grupo. Se $\sigma, \tau \in S_p$, escribimos $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$, e compróbase facilmente que tamén é unha permutación. A operación é asociativa, ten elemento neutro (a identidade ι) e todo elemento ten inverso.

Proposición. O grupo S_p ten $p!$ elementos.

Demostración. Sexa $\sigma \in S_p$. O elemento $\sigma(1)$ pode ser calquera dos elementos do conxunto $\{1, \dots, p\}$. Unha vez escollido este, $\sigma(2)$ pode ser calquera dos $p-1$ elementos restantes; de xeito similar, $\sigma(3)$ non pode tomar nin o valor de $\sigma(1)$ nin o de $\sigma(2)$; e así ata chegar a $\sigma(p)$, para o cal só hai unha posibilidade. □

Os elementos máis importantes do grupo simétrico son os ciclos e as transposicións.

Definición. Dados $a_1, a_2, \dots, a_\ell$ elementos diferentes de $\{1, 2, \dots, p\}$, denotamos como $\gamma = (a_1, a_2, \dots, a_r) \in S_p$ á permutación definida por

$$\gamma(a_1) = a_2,\ \gamma(a_2) = a_3, \dots,\ \gamma(a_{r-1}) = a_r,\ \gamma(a_r) = a_1,\ \gamma(a) = a \text{ se } a \neq a_i.$$

Un elemento así chámase ciclo de lonxitude r ou r-ciclo. A súa lonxitude denótase como $\ell(\gamma)$.

Proposición. Toda permutación se pode escribir como produto de ciclos disxuntos de maneira única (salvo a orde dos ciclos).

Demostración. Sexa $\sigma \in S_p$, e sexa $a_1 \in \{1, \dots, p\}$ un elemento calquera. Consideremos a sucesión dada por $a_{n+1} = \sigma(a_n)$ para todo $n \geq 1$. Como os a_i son elementos dun conxunto finito, chegará un momento no que se repitan. Sexa $a_{r+1} = \sigma(a_r)$ o primeiro que xa saíra antes. Entón ten que ser necesariamente $a_{r+1} = a_1$, xa que se $a_{r+1} = a_k$, con $2 \leq k \leq r$, entón $\sigma(a_r) = a_{r+1} = a_k = \sigma(a_{k-1})$; agora ben, como σ é inxectiva, teriamos que $a_r = a_{k-1}$, que sabemos que non é certo. Escribiremos $\gamma_1 = (a_1, a_2, \dots, a_r)$, que cumpre $\gamma_1(a_i) = \sigma(a_i)$ para todo i. Se os a_i conteñen tódolos elementos de $\{1, \dots, p\}$, entón xa acabamos. En caso contrario, consideramos $b_1 \in A_n$ diferente dos a_i e procedemos como antes ata chegar a un ciclo $\gamma_2 = (b_1, b_2, \dots, b_s)$. Os ciclos son disxuntos, xa que se $b_j = a_i$, entón $b_1 = \gamma_2^{1-j}(b_j) = \sigma^{1-j}(b_j) = \sigma^{1-j}(a_i) = a_{1+i-j \pmod r}$, que é unha contradición. Iterando o proceso chegará un momento no que os ciclos conterán tódolos elementos de $\{1, \dots, p\}$ e teremos unha expresión $\sigma = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_k$ como produto de ciclos disxuntos.
Para ver a unicidade, poñamos $\sigma = \gamma'_1\gamma'_2 \cdots \gamma'_m$, con $\gamma'_1 = (u_1, u_2, \dots, u_t)$. Podemos supoñer sen perda de xeneralidade que γ_1 contén u_1 e que $\gamma_1 = (a_1, a_2, \dots, a_r)$, con $a_1 = u_1$. Como $\gamma_1(a_1) = \sigma(a_1) = \sigma(u_1) = \gamma'_1(u_1)$, vemos que os dous ciclos son o mesmo. Iterando o proceso, concluímos que a descomposición é única. □

Exemplo. Sexa
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 6 & 9 & 8 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_9.$$
A súa descomposición en ciclos dixuntos vén dada por $\sigma = (1,7,5,8)(2,3,6)(4,9)$, aínda que tamén se podería escribir $\sigma = (3,6,2)(5,8,1,7)(9,4)$.

Definición. Unha transposición é un elemento de S_p que intercambia dous elementos e deixa fixos tódolos demais.

Proposición. Toda permutación descompón como produto de transposicións.

Demostración. Como toda permutación descompón como produto de ciclos, é suficiente con ver que un ciclo $\gamma = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ é un produto de transposicións. Iso pódese conseguir pondo, por exemplo,
$$\gamma = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \cdots (a_{r-1}, a_r).$$
$\square$

Proposición. Sexa $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s$ dúas descomposicións dunha permutación en produto de transposicións. Entón r e s teñen a mesma paridade.

Demostración. Dada unha permutación σ, escribiremos $N(\sigma)$ para o número de ciclos disxuntos nos que descompón, que é un enteiro ben determinado (isto inclúe os ciclos de lonxitude un). Para demostrar o resultado, facemos a seguinte observación: se τ é unha transposición, entón $N(\tau\sigma) = N(\sigma) \pm 1$. Para iso, pomos $\tau = (a, b)$ e cómpre distinguir dúas opcións, segundo a e b estean no mesmo ciclo ou non. Se están no mesmo ciclo, entón
$$\tau\sigma = (a,b)(a, \dots, x, b, \dots, y)\gamma_2 \cdots \gamma_k = (a, \dots, x)(b, \dots, y)\gamma_2 \cdots \gamma_k,$$
e o número de ciclos aumenta en un; en cambio, se non están no mesmo ciclo,
$$\tau\sigma = (a,b)(a, \dots, x)(b, \dots, y)\gamma_3 \cdots \gamma_k = (a, \dots, x, b, \dots, y)\gamma_3 \cdots \gamma_k,$$
e o número redúcese en un.
Con esta observación, podemos probar a proposición. Como σ_r é unha transposición, $N(\sigma_r) = p - 1$. Polo tanto,
$$N(\sigma_1 \cdots \sigma_r) \equiv p - r \pmod 2,$$
o cal mostra que $p-r$ e $p-s$ teñen a mesma paridade, e iso é suficiente para concluír. $\square$

Exemplo. Consideremos a permutación $\sigma = (1,7,5,8)(2,3,6)(4,9)$ do exemplo anterior. Entón,
$$(1,5)\sigma = (1,7)(5,8)(2,3,6)(4,9);$$
en cambio, cando consideramos dous elementos en ciclos diferentes,
$$(1,2)\sigma = (1,7,5,8,2,3,6)(4,9).$$

Definición. Unha permutación dise par ou impar segundo a paridade do número de transposicións nas que descompón. O signo dunha permutación σ é $+1$ se σ é par e -1 se σ é impar. Denotarase como $\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Despois desta discusión sobre o grupo simétrico, podemos volver á discusión sobre aplicacións multilineais. Dado un elemento $\sigma \in S_p$ e $f \in T_p(E)$ escribiremos $\sigma \cdot f$ para referirnos ao elemento caracterizado por

$$(\sigma \cdot f)(x_1, \ldots, x_p) = f(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma(p)}).$$

Definición. Sexa $f \in T_p(E)$. Dise que f é simétrico se, para toda permutación $\sigma \in S_p$ se ten que $\sigma \cdot f = f$, é dicir,

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \ldots, x_p).$$

Do mesmo xeito, dise que f é antisimétrico ou alternado se, para toda permutación $\sigma \in S_p$ se ten que $\sigma \cdot f = \operatorname{sgn}(\sigma) f$, é dicir,

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(x_1, \ldots, x_p).$$

Chamamos $S_p(E) \subset T_p(E)$ ao conxunto dos tensores p-covariantes simétricos e $A_p(E) \subset T_p(E)$ ao conxunto dos tensores p-covariantes antisimétricos.

Proposición. Se $f \in A_p(E)$ e $v_1, \ldots, v_p \in E$, cúmprense as seguintes propiedades:

(a) $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_p)$.

(b) Se un vector $v_i = 0$, entón $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_p) = 0$.

(c) Se $v_i = v_j$, entón $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = 0$.

(d) Se $v_j = \sum_{i \neq j} a_i v_i$, entón $f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = 0$.

Demostración. A primeira propiedade é consecuencia de aplicar a definición de forma alternada cunha transposición. A segunda séguese da linealidade de f, mentres que a terceira é consecuencia directa de aplicar a propiedade (a). Finalmente, (d) demóstrase combinando a linealidade de f coa propiedade (c). □

Se E ten dimensión n, imos estudar as formas alternadas de $T_n(E)$, isto é, as aplicacións multilineais alternadas $E \times \overset{n}{\cdots} \times E \longrightarrow K$.

Proposición. O espazo $A_n(E)$ ten dimensión 1, isto é, dada unha aplicación $D \in A_n(E)$, esta queda determinada polos valores que toma sobre unha base ordenada $(e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Demostración. Imos comezar vendo que unha aplicación $D \in A_n(E)$ queda determinada polos seus valores sobre unha base ordenada. Para iso, consideremos vectores $(v_1, \ldots, v_n)$, con $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$. Entón,

$$\begin{aligned} D(v_1, \ldots, v_n) &= D\Big(\sum_j a_{1j} e_j, \ldots, \sum_j a_{nj} e_j \Big) \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{n} D(a_{1j_1} e_{j_1}, \ldots, a_{nj_n} e_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} D(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}). \end{aligned}$$

Aínda que os subíndices $j_1, \dots, j_n$ poden tomar calquera valor en $\{1, \dots, n\}$, o sumando sempre se anulará se dous deles son iguais. Polo tanto, podemos sumar sobre as permutacións de S_n, e obtemos a igualdade

$$D(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} D(e_1, \dots, e_n).$$

Polo tanto, de existir algunha aplicación $D \in A_n(E)$ con $D(e_1, \dots, e_n) = k$, para $k \in K$, a única posibilidade sería

$$D(v_1, \dots, v_n) = k \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Chamámoslle D_k a esta aplicación.
Imos ver que $D_k \in A_n(E)$, o que é unha comprobación inmediata vendo que respecta a suma en cada coordenada, o produto por escalares e que aplicar unha permutación sigma multiplica o valor por $\operatorname{sgn}(\sigma)$. Comezaremos comprobando que respecta a suma, considerando que na coordenada i-ésima pomos $v_i + w_i$, onde $w_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} e_j$

$$D(v_1, \dots, v_i + w_i, \dots, v_n) = k \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (a_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)}) \cdot a_{n\sigma(n)},$$

que é precisamente $D(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + D(v_1, \dots, w_i, \dots, v_n)$. A comprobación para o produto por escalares é a mesma. Finalmente, temos que

$$\begin{aligned}
(\tau D)(v_1, \dots, v_n) &= D(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(n)}) \\
&= k \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)} \\
&= k \cdot \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau^{-1}) a_{1\sigma\tau^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma\tau^{-1}(n)} \\
&= \operatorname{sgn}(\tau) D(v_1, \dots, v_n).
\end{aligned}$$

Polo tanto, probamos que

$$K \longrightarrow A_n(E), \quad k \mapsto D_k$$

é un isomorfismo de espazos vectoriais: non pode haber dúas aplicacións en $A_n(E)$ para as cales a avaliación en $(e_1, \dots, e_n)$ dea k (é dicir, a aplicación é inxectiva), pero si construímos explicitamente unha que funciona, a que chamamos D_k (a aplicación é entón sobrexectiva). Polo tanto $A_n(E)$ ten dimensión 1, como queriamos ver. $\square$

Ao valor $D(v_1, \dots, v_n)$ construído na proba do resultado anterior chamarémoslle valor do determinante dos vectores $v_1, \dots, v_n$ na base $e = e_1, \dots, e_n$. Da demostración, ségue-se que o resultado de aplicar unha aplicación multilineal non nula $D \in A_n(E)$ sobre n vectores é distinto de 0 se e soamente se estes forman unha base.

3. Determinantes

Definición. Sexa E un K-espazo vectorial de dimensión n con base $e = e_1, \dots, e_n$. O determinante é a única aplicación n-multilineal alternada que vale 1 ao avaliala en $(e_1, \dots, e_n)$.

De xeito equivalente, se $v_1, \dots, v_n$ son n vectores de E, con $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, o seu determinante na base e é

$$\det_{(e_i)}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Observamos tamén que a aplicación

$$A_n(E) \longrightarrow K, \quad D \mapsto D(e_1, \dots, e_n)$$

é lineal e bixectiva, dando lugar a un isomorfismo de espazos vectoriais de dimensión 1. Séguese, do feito de que $D \in A_n(E)$ estea determinada polos valores que toma sobre unha base ordenada, que o determinante de n vectores é 0 se e soamente se estes son linealmente dependentes. O determinante tamén cumpre o resto de propiedades que estudamos para as aplicacións multilineais alternadas.
Ao longo desta sección, sexa $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ unha matriz $n \times n$ con entradas nun corpo K.

Definición. O determinante de A, $\det(A)$, defínese como

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Sexa $E = K^n$; escribindo $a_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, temos que $\det A = \det_{(e_i)}(a_1, \dots, a_n)$, isto é, o determinante dunha matriz coincide co determinante dos n vectores columna con respecto á base canónica.
Imos definir por último o determinante dun endomorfismo $f : E \longrightarrow E$ de xeito que non dependa da elección dunha base. Para todo tensor n-covariante alternado D, a aplicación

$$\hat{f}(D) : E \times \overset{n}{\cdots} \times E \longrightarrow K \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto D(f(v_1), \dots, f(v_n))$$

é un tensor n-covariante alternado. Temos polo tanto unha aplicación

$$\hat{f} : A_n(E) \longrightarrow A_n(E) \quad D \mapsto \hat{f}(D)$$

que é lineal. Como $A_n(E)$ é un espazo vectorial de dimensión 1, $\hat{f}$ é un múltiplo da identidade, isto é $\hat{f} = d \cdot \mathbb{I}_{A_n(E)}$.

Definición. O determinante do endomorfismo f é a razón d que fai que a igualdade $\hat{f} = d \cdot \mathbb{I}_{A_n(E)}$ sexa certa, isto é, $\hat{f} = (\det f) \cdot \mathbb{I}_{A_n(E)}$.

Fixemos $e = e_1, \dots, e_n$ unha base de E e un tensor n-covariante alternado $D \neq 0$. Temos que $\hat{f} = (\det f)\mathbb{I}_n$, polo que $\hat{f}(D) = (\det f)D$, e polo tanto

$$\hat{f}(D)(e_1, \dots, e_n) = D(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{(e_i)}(f(e_1) \dots, f(e_n)) D(e_1, \dots, e_n).$$

Observamos que no último paso empregamos a mesma idea que ao demostrar que $D(e_1, \dots, e_n)$ determina unha aplicación multilineal alternada. De aquí conclúese que $\det f = \det_{(e_i)}(f(e_1), \dots, f(e_n))$, e como este cálculo funciona independentemente da base escollida, deducimos que o determinante do endomorfismo coincide co determinante da matriz en calquera base.

4. Propiedades dos determinantes

Hai algunhas propiedades habituais dos determinantes que son evidentes pola súa definición como forma bilineal alternada.

(a) O determinante obtido ao multiplicar unha columna dunha matriz por un escalar $\lambda \in K$ é o determinante inicial multiplicado por λ.

(b) O determinante non cambia cando a unha columna lle sumamos un múltiplo doutra columna.

(c) Ao permutar dúas columnas o determinante cambia de signo.

Imos comezar probando unha proposición doada, pero que non resulta completamente inmediata a partir da construción.

Proposición. Sexa A^t a matriz trasposta de A. Entón, $\det A = \det A^t$.

Demostración. O resultado é consecuencia da seguinte cadea de igualdades:

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n} \\ &= \det A^t\end{aligned},$$

onde a segunda igualdade séguese de reordenar o produto en orde crecente de columna e a terceira é consecuencia de $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$. □

A definición que demos non é demasiado eficaz para o cálculo de determinantes, e é máis habitual usar a chamada regra de Laplace. Para presentala, sexa $A^{(r,s)} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ a matriz obtida eliminando a fila r-ésima e a columna s-ésima. Sexa tamén $a^*_{r,s} = (-1)^{r+s} \det(A^{(r,s)})$.

Proposición. Tense que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^*_{jk} = \begin{cases} \det A & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Demostración. Imos comezar co caso $i = j$. Sexa $\sigma_t \in S_n$ o ciclo dado por $(t, t+1, \ldots, n)$, onde $1 \leq t \leq n$ (en concreto, $\sigma_t(t) = t+1$, $\sigma_t(t+1) = t+2$ e así ata $\sigma_t(n) = t$). Entón, $\operatorname{sgn}(\sigma_t) = (-1)^{n-t}$. Esta notación permítenos escribir $A^{(r,s)} = (a^{(r,s)}_{ij})$, onde $a^{(r,s)}_{ij} = a_{\sigma_r(i)\sigma_s(j)}$.
Facemos a seguinte observación. Identificando $S_{n-1} \simeq \{\sigma \in S_n \text{ con } \sigma(n) = n\}$, hai unha bixección

$$\{\sigma \in S_n \text{ con } \sigma(i) = k\} \xrightarrow{\sim} S_{n-1}, \quad \sigma \mapsto \tau = \sigma_k^{-1} \sigma \sigma_i.$$

A aplicación está ben definida porque $\tau(n) = \sigma_k^{-1}(\sigma(\sigma_i(n))) = \sigma_k^{-1}(\sigma(i)) = \sigma_k^{-1}(k) = n$; por outro lado, $\sigma = \sigma_k \tau \sigma_i^{-1}$ é a inversa da aplicación, co cal é efectivamente unha bixección.

Observamos agora que

$$
\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(i)=k}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} a_{i+1\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{\tau\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma_k \tau \sigma_i^{-1}) a_{1\sigma_k\tau\sigma_i^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma_k\tau\sigma_i^{-1}(n)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \sum_{\tau\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\tau) a_{\sigma_i(1)\sigma_k\tau(1)} \cdots a_{\sigma_i(n-1)\sigma_k\tau(n-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \sum_{\tau\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\tau) a^{(i,k)}_{1\tau(1)} \cdots a^{(i,k)}_{n-1\tau(n-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^*_{ik}.
\end{aligned}
$$

Por outra banda, se $i \neq j$, entón sexa $B = (b_{ij})$ a matriz que é igual a A pero reemprazando a fila j-ésima pola i-ésima. Entón, polo apartado anterior,

$$0 = \det B = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} b^*_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^*_{jk},$$

onde usamos que sobre as entradas que non están na fila j-ésima as matrices A e B coinciden. $\square$

Exemplo. Imos considerar un exemplo da regra de Laplace para o cálculo dun determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0;$$

en particular, poderiamos ter observado que o determinante era 0 sen facer ningún cálculo xa que a terceira columna é a suma das dúas primeiras.

Proposición. Se f e g son dous endomorfismos de E e $\mathbb{I}_E$ é o endomorfismo identidade, cúmprese que $\det(g \circ f) = \det f \cdot \det g$ e $\det \mathbb{I}_E = 1$. Do mesmo xeito, dadas $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, con $\mathbb{I}_n$ a matriz identidade, temos que $\det AB = \det A \cdot \det B$ e $\det \mathbb{I}_n = 1$.

Demostración. Sexa $D \in A_n(E)$ e sexan $v_1, \dots, v_n$ vectores arbitrarios de E. Entón

$$
\begin{aligned}
\widehat{g \circ f}(D)(v_1, \dots, v_n) &= D(g(f(v_1)), \dots, g(f(v_n))) \\
&= \hat{g}(D)(f(v_1), \dots, f(v_n)) \\
&= \hat{f}(\hat{g}(D))(v_1, \dots, v_n) = (\hat{f} \circ \hat{g})(D)(v_1, \dots, v_n).
\end{aligned}
$$

De aquí concluímos que $\widehat{g \circ f} = \hat{f} \circ \hat{g}$, xa que $\widehat{g \circ f} = \det(g \circ f) \cdot \mathbb{I}_{A_n(E)}$ e $\hat{f} \circ \hat{g} = (\det f) \cdot (\det g) \cdot \mathbb{I}_{A_n(E)}$.

No caso do endomorfismo identidade, temos que calcular o valor de $\hat{\mathbb{I}}_E(D)(v_1, \ldots, v_n)$, pero é claro que coincide con $D(v_1, \ldots, v_n) = \mathbb{I}_{A_n(E)}(D)(v_1, \ldots, v_n)$. Polo tanto, $\hat{\mathbb{I}}_E = \mathbb{I}_{A_n(E)}$, e usando a definición de determinante temos o resultado do enunciado.
Unha vez temos o resultado demostrado para endomorfismo, é inmediato que tamén se cumpre para matrices, dado que o determinante dun endomorfismo coincide co determinante da matriz independentemente da base. □

5. Rangos de matrices e sistemas de ecuacións

Sexa A unha matriz de tamaño $m \times n$ e k un enteiro que cumpre $0 \leq k \leq \text{mín}\{m, n\}$. Un menor de orde k de A é o determinante dunha matriz $k \times k$ obtida eliminando $m-k$ filas e $n-k$ columnas de A.

Proposición. O rango dunha matriz A é o máximo das ordes dos menores non nulos de A.

Demostración. Sexa r o rango da matriz, e sexan $i_1, \ldots, i_p$ as columnas coas que se formou o menor, que identificamos con vectores $a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}$. Se $p > r$, os vectores son linealmente dependentes e polo tanto un deles é combinación lineal do resto; isto implica que o determinante correspondente é cero.
Imos probar agora que hai un menor de orde r con determinante non nulo. Para iso, consideramos r columnas que sexan linealmente independentes, $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$, que existen xa que o rango é r. Observamos agora que é posible escoller $n-r$ vectores da base canónica, $e_{i_{r+1}}, \ldots, e_{i_n}$, de maneira que $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}, e_{i_{r+1}}, \ldots, e_{i_n}\}$ formen unha base (isto é consecuencia do feito que r vectores linealmente independentes só nos poden permitir escribir como combinación lineal deles un máximo de r vectores dunha base). Polo tanto, o determinante dos vectores $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}, e_{i_{r+1}}, \ldots, e_{i_n}\}$ é distinto de cero. Ademais, en cada unha das $n-r$ columnas do final tódolos elementos son cero, salvo un deles que vale 1. Se aplicamos a regra de Laplace ao cálculo deste determinante temos que coincide, salvo signo, co determinante $r \times r$ obtido ao eliminar das primeiras r columnas as filas nas que algunha das $n-r$ columnas finais tiña un 1. □

Imos agora enunciar e demostrar a regra de Cramer, que permite atopar as solucións duns sistema de ecuacións.

Proposición. Todo sistema lineal $Ax = b$ de n ecuacións e n incógnitas, con $A \in \mathcal{M}_n(K)$ invertible, é compatible determinado. As compoñentes x_i da súa solución $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ están dadas pola fórmula

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

onde A_i é a matriz A coa columna i-ésima cambiada polo vector b.

Demostración. O feito de que o sistema sexa compatible determinado vén do feito que a igualdade $AX = b$ é equivalente a $x = A^{-1}b$, co cal a única solución é precisamente $A^{-1}b$. Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $a_1, \ldots, a_n$ son as columnas de A, temos que o vector b se escribe como $x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = b$. Polo tanto,

$$\begin{aligned}
\det(A_i) &= \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_n) \\
&= x_i \det(A),
\end{aligned}$$

onde usamos a definición de A_i e as propiedades dos determinantes. $\square$

Observación. Desde un punto de vista computacional, o cálculo dos $n+1$ determinantes que se precisan para resolver un sistema por Cramer é moito máis custoso que aplicar o método de Gauss.

Polo xeral, o noso obxecto de interese van ser os sistemas lineais homoxéneos, é dicir, nos que $b = 0$. Porén, ten sentido considerar o problema xeral no que queremos resolver o sistema matricial $Ax = b$, onde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ e $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}$. En termos de operadores lineais, podemos considerar que A é a matriz dun endomorfismo

$$f \,:\, K^n \longrightarrow K^m, \quad x \mapsto f(x).$$

Entón, a condición necesaria é suficiente para que o sistema teña algunha solución é que $b \in \operatorname{Im}(f)$, isto é, que para unha base $e_1, \ldots, e_m$ se cumpra

$$\langle f(e_1), \ldots, f(e_n), b\rangle = \langle f(e_1), \ldots, f(e_n)\rangle.$$

Se sabemos que o sistema ten algunha solución, é dicir, $b \in \operatorname{Im}(f)$, podemos considerar a aplicación $\tilde{f}$ do primeiro teorema de isomorfismo:

$$\tilde{f} \,:\, K^m/\ker(f) \longrightarrow \operatorname{Im}(f), \quad [x] \mapsto [f(x)].$$

Se $b \in \operatorname{Im}(f)$ e $f(x_0) = b$, calquera outra solución de $f(x) = b$ virá dada por $x = x_0 + y$, onde $y \in \ker(f)$, isto é, o conxunto de solucións é $x_0 + \ker(f)$.