

## Álgebra Linear e Multilinear. Grao en Matemáticas. USC.

Lista de exercicios, tema 3. Estructura das aplicacións lineais.

### Vectores propios e teorema de Cayley–Hamilton.

**Problema 1.** Encontrar a matriz na base canónica dun endomorfismo  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  tal que:

(i)  $f(e_1) + f(e_3) = e_1 + e_3.$

(ii)  $f(e_1) + f(e_2) = e_1 + e_2.$

(iii) Os vectores do subespazo  $U \cap V$  obtido mediante a intersección de  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } z + y - 2x = 0\}$  e  $V = \langle (2, 0, 3), (1, 0, 1) \rangle$  son vectores propios de valor propio  $-1$ .

**Problema 2.** Achar os valores propios racionais, reais e complexos das seguintes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & -13 & 10 \\ 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -15 & -17 \\ 1 & -7 & -6 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -4 & 28 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Problema 3.** Sexa  $f$  o endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$f(x, y, z) = (x + y, x + ay - z, -x + y - bz).$$

(a) Determinar os valores de  $a$  e  $b$  para os cales o vector  $(1, 1, 0)$  é un vector propio de  $f$  e o subespazo  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } y + z = 0\}$  é un subespazo invariante por  $f$ .

(b) Determinar os valores de  $a$  e  $b$  para os cales  $1$  é un valor propio de  $f$ . Para que valores  $1$  é valor propio de  $f$  con multiplicidade alxébrica  $2$ ?

**Problema 4.** Sexa  $f \in \text{End}(V)$  e sexa  $U \subset V$  un subespazo propio. Sexa  $f|_U \in \text{End}(U)$  a restrición do endomorfismo ao subespazo  $U$ . Demostrar que o polinomio característico  $\text{Char}(f|_U; X)$  divide ao polinomio característico  $\text{Char}(f; X)$ .

**Problema 5.** Sexa  $f \in \text{End}(V)$  e sexa  $U \subset V$  un subespazo propio. Sexa  $W = V/U$  o espazo vectorial cociente correspondente. Comprobar que a aplicación  $f|_W : W \rightarrow W$  definida por  $f|_W([v]) = [f(v)]$  está ben definida e é un endomorfismo de  $W$ . Demostrar que

$$\text{Char}(f; X) = \text{Char}(f|_U; X)\text{Char}(f|_W; X).$$

**Problema 6.** Sexa  $f$  un endomorfismo dun  $\mathbb{R}$ -espazo vectorial  $E$  de dimensión finita. Demostrar que o endomorfismo  $f$  ten como mínimo un valor propio se e soamente se existe como mínimo un subespazo invariante por  $f$  de dimensión impar.

### Endomorfismos diagonalizables.

**Problema 7.** Encontrar os valores e vectores propios das matrices seguintes e dicir se son ou non diagonalizables.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 20 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Problema 8.** Sabendo que  $(1, 2)$  e  $(1, 3)$  son vectores propios dunha matriz  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de valores propios  $-1$  e  $3$ , respectivamente, calcular  $A^n$  para  $n \geq 1$ .

**Problema 9.** Demostrar que os endomorfismos  $f, g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  definidos por

$$f(A) = A^t \quad \text{e} \quad g(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A$$

son ambos diagonalizables e encontrar unha base de vectores propios para cada un.

**Problema 10.** Determinar os endomorfismos  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  que verifiquen as condicións que se especifican e, en cada caso, calcular o seu polinomio característico.

- Que teña os vectores propios  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  e  $(1, 0, 1)$  con valores propios  $2$ ,  $1$  e  $-1$ , respectivamente.
- Que teña núcleo  $\ker(f) = \langle (0, 0, 1) \rangle$  e tal que  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } x + y = z\}$  sexa o subespazo xerado polos vectores propios de valor propio  $2$ .
- Que teña un único valor propio real, núcleo  $\ker(f) = \langle (0, 0, 1) \rangle$  e tal que  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } x + y = z\}$  sexa un subespazo vectorial invariante.
- Non diagonalizable e tal que  $(1, 0, 0)$  e  $(0, -1, 1)$  sexan vectores propios de valor propio  $-1$ .

**Problema 11.** Consideramos o endomorfismo  $f : \mathbb{C}_3[x] \rightarrow \mathbb{C}_3[x]$  dado por

$$f(p(t)) = p(t) + p(1)(t - 3) - 2p'(1)(t - 1)$$

Encontrar os valores propios e os vectores propios de  $f$  e discutir se o endomorfismo diagonaliza.

**Problema 12.** Sexa  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- Calcular a matriz da aplicación lineal  $f_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dada por  $X \mapsto AX - XA$ . Calcular a matriz da aplicación lineal e achar o seu rango.
- Cal é a relación entre a dimensión do núcleo de  $f_A$  e o grao do polinomio mínimo de  $A$ ?
- Se  $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , e  $a = d$ ,  $a' = b'$  e  $b = c' = 0$ , demostrar que os núcleos de  $f_A$  e  $f_B$  teñen un plano común.
- Dar unha condición necesaria e suficiente para que  $\ker(f_A) + \ker(f_B) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Problema 13.** Sexa  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  unha matriz con traza  $t$ . Demostrar que se  $t$  é un valor propio de  $A$ , entón  $A^m = t^{m-1}A$  para todo natural  $m \geq 1$ .

**Problema 14.** Sexan  $f, g \in \text{End}(E)$  endomorfismos dun espazo vectorial de dimensión finita. Demostrar que se  $v$  é un vector propio de  $g \circ f$  de valor propio  $\lambda \neq 0$ , entón  $f(v)$  é un vector propio de  $f \circ g$  de valor propio  $\lambda$ . Que pasa se  $\lambda = 0$ ? Demostrar que se  $g \circ f$  é invertible e diagonalizable, entón  $f \circ g$  tamén é diagonalizable.

**Problema 15.** Sexa  $E$  un espazo vectorial de dimensión finita e sexa  $f : E \rightarrow E$  un endomorfismo que cumpre  $f^2 = f$ .

- (a) Demostrar que  $f$  diagonaliza.
- (b) Demostrar que  $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ .
- (c) Dar unha fórmula para expresar un vector  $v$  de  $E$  como suma dun do núcleo e outro da imaxe.

**Problema 16.** Probar que unha matriz cadrada  $A$  de orde  $n$  con entradas reais e diagonalizable sobre os números complexos en calquera dos seguintes casos.

- (a) Se ten inversa e esta cumpre que  $A^{-1} = 2\mathbf{I}_n - A^3/2$ .
- (b) Se o seu polinomio característico é igual a  $-X^5 - X^3 + X^2 + 1$ .
- (c) Se as matrices  $A^2$  e  $A^3 + A - \mathbf{I}_n$  son inversas.

**Problema 17.** Unha matriz  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  dise que é nilpotente se existe un enteiro  $k \geq 1$  tal que  $A^k = 0$ . Sexa  $A$  unha matriz nilpotente.

- (a) Demostrar que  $A$  é conxugada dalgunha matriz triangular superior estricta (é dicir, unha matriz  $(u_{ij})$  con entradas  $u_{ij} = 0$  se  $i \geq j$ ).
- (b) Demostrar que  $A^n = 0$ .
- (c) Encontrar o polinomio característico da matriz  $A$  e, usando este, encontrar o da matriz  $A + \mathbf{I}_n$ .
- (d) Calcular  $\det(A + \mathbf{I}_n)$ .
- (e) Demostrar que  $\det(A + B) = \det(B)$  para toda matriz  $B \in \mathcal{M}_n(K)$  que conmute con  $A$ .

**Problema 18.** Sexa  $A$  unha matriz cadrada real de orden  $n$  de maneira que  $A^5 = \mathbf{I}_n$ . Probar que se  $A$  diagonaliza sobre  $\mathbb{R}$ , entón  $A = \mathbf{I}_n$ .

### Forma de Jordan.

**Problema 19.** Calcular bases de Jordan dos endomorfismos definidos polas seguintes matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 15 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Problema 20.** Calcular bases de Jordan dos endomorfismos definidos polas seguintes matrices

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 & 0 \\ -4 & 4 & -20 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

**Problema 21.** Determinar tódalas posibles formas de Jordan para un endomorfismo de polinomio característico  $-(x - 2)^3(x - 5)^2$ .

**Problema 22.** Achar, en cada un dos seguintes casos, a forma canónica de Jordan dun endomorfismo  $f$  se o seu polinomio característico é  $x^7$ .

- (a) As dimensións dos núcleos de  $f$  e  $f^2$  son 3 e 6, respectivamente.
- (b) As dimensións dos núcleos de  $f$ ,  $f^2$  e  $f^3$  son 3, 5 e 7, respectivamente.
- (c) As dimensións dos núcleos de  $f$  e  $f^3$  son 3 e 6, respectivamente.

**Problema 23.** Considérase o endomorfismo de  $\mathbb{R}^4$  definida por

$$f(x, y, z, t) = (2x, 4y - 14z + 5t, y - 4z + 2t, y - 6z + 4t).$$

Encontrar os seus vectores propios e os vectores propios xeralizados, dar unha base de vectores propios xeralizados e a matriz de  $f$  nesta base.

**Problema 24.** Encontrar tódalas matrices  $A$  tales que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 13 & -25 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Problema 25.** Encontrar a forma de Jordan dun endomorfismo  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  que cumpre as seguintes catro condicións.

- (i)  $f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (1, 1, 1)$ .
- (ii)  $f(e_1) - f(e_2) = f(1, 1, -2)$ .
- (iii)  $f^2 = f$ .
- (iv) O subespazo  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ con } y + 2z = 0\} \cap \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$  é invariante por  $f$ .

**Problema 26.** Dar a matriz do endomorfismo  $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  que cumpre as seguintes cinco condicións.

- (i)  $\langle e_1, e_2 \rangle$  e  $\langle e_3 \rangle$  son subespazos invariantes por  $f$ .
- (ii)  $\ker(f) = \langle (1, 2, 0) \rangle$ .
- (iii) A matriz de  $f$  na base canónica é simétrica.
- (iv)  $\text{Tr}(f) = 6$ .
- (v) 1 é un valor propio de  $f$ .

**Problema 27.** Sexa  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  o endomorfismo de  $\mathbb{R}^4$  que na base canónica ten por matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontrar a forma de Jordan e unha base de Jordan, e encontrar tódolos subespazos vectoriais invariantes por  $f$  de dimensión 2.

**Problema 28.** Calcular  $J^n$ , onde  $J \in \mathcal{M}_6(K)$  é a matriz diagonal por bloques que ten na diagonal

$$J_1 = (\lambda), \quad J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Problema 29.** A evolución temporal dunha poboación de árbores está descrita polo seguinte modelo matemático:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a/5 \\ 1 & 9/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

con  $a \in \mathbb{R}$  un parámetro e onde  $x_n$  e  $y_n$  representan as densidades das clases de árbores en formación e as clases de árbores formados, respectivamente.

- (a) Para que valores de  $a$  é  $\lambda = 1$  un valor propio da matriz?
- (b) Para  $a = 1$ , encontrar a forma de Jordan e unha base de Jordan da matriz. Estudar o comportamento a longo prazo da poboación de árbores.
- (c) Para  $a = -4/5$ , encontrar a forma de Jordan e unha base de Jordan da matriz.
- (d) Estudar o comportamento a longo prazo da poboación para  $a \geq -4/5$ .

**Problema 30.** Achar a forma canónica de Jordan dun endomorfismo que ten polinomio característico  $-(x - 2)^4(x - 5)^3$  e no que os subespazos de vectores propios asociados aos valores propios 2 e 5 teñen dimensións 3 e 1, respectivamente.